# L'IPERBOLE

## Definizione

L'iperbole è il **luogo geometrico** dei punti $P$ del piano per i quali risulta **costante la differenza** delle distanze da $F_1$ e $F_2$.

$$|\ \overline{PF_1} - \overline{PF_2}\ | = costante$$

## Nomenclature'

- $F_1$ e $F_2$ sono detti **fuochi** dell'iperbole.

  Il punto medio $M$ di $F_1$ e $F_2$ è detto **centro** dell'iperbolee.

- Indichiamo con $2c = \overline{F_1F_2}$ la **distanza focale.**

  Indichiamo con $2a$ la differenza costante delle distanze di un generico punto $P$ dai fuochi.

  ⇨ Se $P$ appartiene all'iperbole allora $|\ \overline{PF_1} - \overline{PF_2}\ | = 2a$ $\rightarrow$ per la **disuguaglianza triangolare** segue che: $2a < 2c$ (con $\boldsymbol{a > 0}$) $\rightarrow$ $\boldsymbol{0 < a < c}$

# Le equazioni

## L'iperbole con i FUOCHI SULL'ASSE X

Scelgo il sistema di riferimento in modo che:

- l'$asse\ x$ coincida con $r_{F_1F_2}$ (retta passante per i due fuochi)
- l'origine coincida con il centro dell'iperbole, ovvero il punto medio $M$ di $F_1$ e $F_2$

Se $\overline{F_1F_2} = 2c,\ c > 0 \rightarrow F_2(-c\ ,0\ )$ e $F_1(\ c\ ,0\ )$

⇨ Sia $P$ punto del piano $P(\ x\ ,y\ )$, imponiamo che $|\ \overline{PF_1} - \overline{PF_2}\ | = 2a$

⇨ La distanza $\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ , mentre $\overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ con $c > 0$.

⇨ $\left|\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ \right| = 2a$

Semplificando l'equazione otteniamo:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Poiché $a < c$ allora $c^2 - a^2 > 0$

Definiamo $b^2 = c^2 - a^2$ $\rightarrow$ semplificando ora entrambi i membri per $a^2b^2$

⇨ Risulta infine l'**EQUAZIONE CANONICA** dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

## L'iperbole con i FUOCHI SULL'ASSE Y

Scelgo il sistema di riferimento in modo che:

- l'$asse\ y$ coincida con $r_{F_1F_2}$ (retta passante per i due fuochi)
- l'origine coincida con il centro dell'iperbole, ovvero punto medio $M$ di $F_1$ e $F_2$

⇨ $F_2(\,0\,,\,-c\,)$ e $F_1(\,0\,,\,c\,)$

Si ottiene una **differente** forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

con $|\,\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\,| = 2b$ e (in questo caso si pone) $c^2 - b^2 = a^2$

**NB:** *In entrambi i casi l'equazione dell'iperbole non rappresenta una funzione, poiché ad ogni valore della* $x$ *corrispondono due distinti valori della* $y$.

## Simmetrie all'interno dell'iperbole

- L'iperbole è simmetrica rispetto l'$asse\ y$
- L'iperbole è simmetrica rispetto l'$asse\ x$
- L'iperbole è simmetrica rispetto al punto di intersezione dei suoi assi, ovvero l'**origine**.

## Nomenclature'': fuochi sull'ASSE X

Indichiamo come **vertici reali** dell'iperbole le sue intersezioni con l'$asse\ x$.

⇨ $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$

Indichiamo come **asse trasverso** il segmento $A_1 A_2$ , su cui **giacciono i due fuochi**.

I punti $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$ sono detti **vertici non reali** (non esistono intersezioni reali con l'$asse\ y$) e il segmento che li congiunge è denominato **asse non trasverso.**

## Nomenclature'': fuochi sull'ASSE Y

Indichiamo come **vertici reali** dell'iperbole le sue intersezioni con l'$asse\ y$.

⇨ $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$

Indichiamo come **asse trasverso** il segmento $B_1 B_2$ , su cui **giacciono i due fuochi**.

I punti $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$ sono detti **vertici non reali** (non esistono intersezioni reali con l'$asse\ x$) e il segmento che li congiunge è denominato **asse non trasverso.**

# Asintoti

- Chiamiamo **asintoti dell'iperbole** le particolari rette:

$$\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y = -\frac{b}{a}x}$$

Tali rette definiscono la striscia che delimita il grafico dell'iperbole, perciò le rette che intersecano la curva avranno il coefficiente angolare $m$ che varia all'interno dei valori:

$$\boldsymbol{-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}}$$

⇨ L'iperbole NON interseca i propri asintoti

⇨ La distanza degli asintoti dall'iperbole tende a zero, ma non si azzera mai

## Coordinate dei fuochi

$F_1$ e $F_2$ appartenenti all'*asse x*

- ⇨ $b^2 = c^2 - a^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$
- ⇨ $F_2( -\sqrt{a^2 + b^2}\ , 0\ )$ e $F_1( \sqrt{a^2 + b^2}\ , 0\ )$

analogamente $F_1$ e $F_2$ appartenenti all'*asse y*

- ⇨ $F_2( 0\ , -\sqrt{a^2 + b^2})$ e $F_1( 0\ , \sqrt{a^2 + b^2}\ )$

## Eccentricità

$$e = \frac{\text{distanza focale}}{lunghezza\ asse\ trasverso}\ , \quad \text{poiché}\ \ c > a > 0 \ \ \rightarrow \ \ e > 1$$

- ⇨ $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ se i fuochi appartengono l'*asse x*
- ⇨ $e = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$ se i fuochi appartengono l'*asse y*