

# L'ELLISSE

## Definizione

Dati  $F_1$  e  $F_2$  punti del piano definiamo ellisse il **luogo geometrico** dei punti  $P$  del piano per i quali risulta **costante la somma** delle distanze da  $F_1$  e  $F_2$ .

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{costante}$$

## Nomenclature'

- $F_1$  e  $F_2$  sono detti **fuochi** dell'ellisse.

Il punto medio  $M$  di  $F_1$  e  $F_2$  è detto **centro** dell'ellisse.

- Indichiamo con  $2c = \overline{F_1F_2}$  la **distanza focale**.

Indichiamo con  $2a$  la costante delle distanze di un generico punto  $P$  dai fuochi.

⇒ Se  $P$  appartiene all'ellisse allora  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

$$2c > 0, 2a > 0 \rightarrow c > 0, a > 0$$

## Le equazioni

### Osservazione preliminare

Dati  $F_1$  e  $F_2$  fuochi e  $P$  appartenente all'ellisse

⇒  $F_1PF_2$  è un triangolo non degenere se e solo se  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2}$

⇒ Quindi solo se  $2a > 2c$

⇒  $a > c$

## L'ellisse con i FUOCHI SULL'ASSE X

Scelgo il sistema di riferimento in modo che:

- l'asse  $x$  coincida con  $r_{F_1F_2}$  (retta passante per i due fuochi)
- l'origine coincida con il centro dell'ellisse, ovvero punto medio  $M$  di  $F_1$  e  $F_2$

Se  $\overline{F_1F_2} = 2c, c > 0 \rightarrow F_2(-c, 0)$  e  $F_1(c, 0)$

⇒ Sia  $P$  punto del piano  $P(x, y)$ , imponiamo che  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ , con  $a > 0$ .

⇒ La distanza  $\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ , mentre  $\overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$  con  $c > 0$ .

⇒  $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

Semplificando l'equazione otteniamo:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Poiché  $a > c$  allora  $a^2 > c^2$

Definiamo  $b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow$  semplificando ora entrambi i membri per  $a^2b^2$

⇒ Risulta infine l'**EQUAZIONE CANONICA** dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

### Equazione canonica dell'ellisse con $F_1$ e $F_2$ sull'asse $x$

$a, c$  parametri di partenza e  $b^2 = a^2 - c^2$ ,  $a^2 > b^2$

⇒  $a > b$

### L'ellisse con i FUOCHI SULL'ASSE Y

Scelgo il sistema di riferimento in modo che:

- l'asse  $y$  coincida con  $r_{F_1F_2}$  (retta passante per i due fuochi)
- l'origine coincida con il centro dell'ellisse, ovvero punto medio  $M$  di  $F_1$  e  $F_2$

Si ottiene analogamente la forma canonica

⇒  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  in cui tuttavia  $b > a$

**NB:** In entrambi i casi l'equazione dell'ellisse non rappresenta una funzione, poiché ad ogni valore della  $x$  corrispondono due distinti valori della  $y$ .

Esempio:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow a = 4, b = 3 \rightarrow a > b$

$\Rightarrow F_1$  e  $F_2$  appartengono all'asse  $x$

**Coordinate dei fuochi:**  $b^2 = a^2 - c^2$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$

$\Rightarrow F_2(-\sqrt{7}, 0)$  e  $F_1(\sqrt{7}, 0)$

## Simmetrie all'interno dell'ellisse

- L'ellisse è simmetrica rispetto l'asse  $y$
- L'ellisse è simmetrica rispetto l'asse  $x$
- L'ellisse è simmetrica rispetto al punto di intersezione dei suoi assi, ovvero l'**origine**.

## Nomenclature''

Indichiamo come **vertici dell'ellisse** le sue intersezioni con gli assi.

Indichiamo come **assi dell'ellisse** i segmenti che hanno come estremi due vertici sullo stesso asse.

Se  $F_1$  e  $F_2$  appartengono all'asse  $x$ , allora:

l'asse maggiore misura  $2a$ , mentre l'asse minore risulta  $2b$ ;

viceversa se i due fuochi appartengono all'asse  $y$ :

l'asse maggiore misura  $2b$ , mentre l'asse minore risulta  $2a$ .

## Coordinate dei fuochi

$F_1$  e  $F_2$  appartenenti all'asse  $x$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow F_2(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \text{ e } F_1(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

$F_1$  e  $F_2$  appartenenti all'asse  $y$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - c^2 \rightarrow c^2 = b^2 - a^2 \rightarrow c = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow F_2(0, -\sqrt{b^2 - a^2}) \text{ e } F_1(0, \sqrt{b^2 - a^2})$$

## Eccentricità

$$e = \frac{\text{distanza focale}}{\text{lunghezza asse maggiore}}, \quad 0 \leq e \leq 1$$

**Se  $e = 0$** , allora  $a = b \rightarrow$  i fuochi coincidono con  $O(0, 0) \rightarrow$  l'ellisse è una

**circonferenza** con centro nell'origine  $\rightarrow$  raggio  $= a = b$

Quando i fuochi appartengono all'asse  $x \rightarrow e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

Quando i fuochi appartengono all'asse  $y \rightarrow e = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$